Staatliche Berufsoberschule Nürnberg

Daniel Körner: koerner@bos-n.de

Webinar am 6. April 2020

Exponentialfunktionen: Diskussion und Anwendung

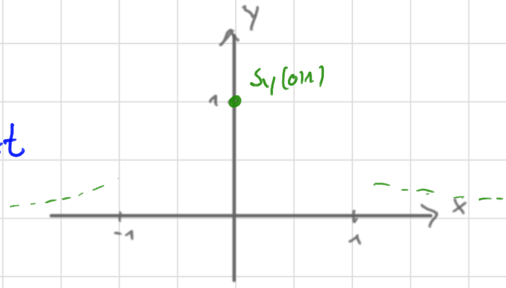
1. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \underbrace{(1+x^2)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2}}_{>0}$ mit $D = \mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen G_f der Funktion f mit der y-Achse des Koordinatensystems an.

1.2 Weisen Sie nach, dass G_f achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems verläuft.

1.1 $x=0$ in $f(x)$: $f(0) = \underbrace{(1+0^2)}_{1} \cdot \underbrace{e^{-0^2}}_{1} = 1$

$S_y(0|1)$



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \boxed{(1+x^2)} \cdot \boxed{e^{-x^2}} = 0^+$ ▷ e-Fkt. dominiert

∞ $\quad$ 0

$x = 10: \; e^{-10^2} = e^{-100} = \frac{1}{e^{100}}$

1.2. $f(-x) = (1 + \underbrace{(-x)^2}_{x^2}) \cdot e^{-\underbrace{(-x)^2}_{x^2}} = (1+x^2) \cdot e^{-x^2} = f(x)$

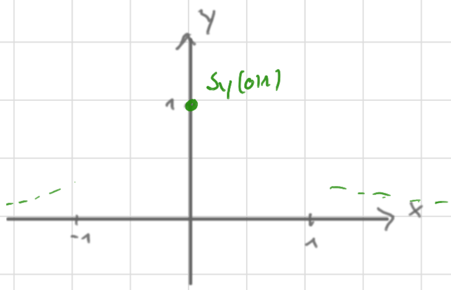
UND die Definitionsmenge ist symm. zu $x=0$. $(D=\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ G_f ist achsensymm. zur y-Achse.

$f: x \mapsto \overset{u}{\boxed{(1+x^2)}}\,\overset{v}{\boxed{e^{-x^2}}}$ Produkt

1.3 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes. [Zwischenergebnis: $f'(x) = -2x^3 \cdot e^{-x^2}$]

1. Ableitung: Produktregel: $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$



NR: $u = (1+x^2)$

$u' = 2x$

$v = \underbrace{e^{\overset{q}{-x^2}}}_{w(q)}$

$v' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$ ▷ Kettenregel $w'(q) \cdot q'$

$$f'(x) = 2x \cdot \boxed{e^{-x^2}} + (1+x^2) \cdot \boxed{e^{-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$f'(x) = \boxed{e^{-x^2}} \cdot \left(2x + (1+x^2)\cdot(-2x)\right) = e^{-x^2} \cdot (2x - 2x - 2x^3) =$$

$$= -2x^3 \cdot \underset{>0}{\boxed{e^{-x^2}}} = 0$$ für $x = 0$ wegen $-2x^3 = 0$

NR: $x = -1$: $-2 \cdot (-1)^3 = 2 > 0$
$x = 1$: $-2 \cdot 1^3 = -2 < 0$ } mit VZW von + zu − bei $x=0$

		$x=0$	
$f'(x)$	+		−
G_f	↗	→	↘

Hochpunkt

$HP(0|1) \mathrel{\hat{=}} S_y(0|1)$

$f'(x) = \underbrace{-2x^3}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{v}$

1.4 Bestimmen Sie die Koordinaten aller Wendepunkte. [Zwischenergebnis: $f''(x) = (4x^4 - 6x^2) \cdot e^{-x^2}$]

$u' \cdot v + u \cdot v'$

$f''(x) = -6x^2 \cdot \boxed{e^{-x^2}} + (-2x^3) \cdot \boxed{e^{-x^2}} (-2x)$ $\qquad v' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$= e^{-x^2} \cdot (-6x^2 + (-2x^3) \cdot (-2x))$

$= \underbrace{\boxed{e^{-x^2}}}_{>0} \cdot \boxed{(-6x^2 + 4x^4)} = 0$

doppelt

NR: $x^2 \cdot \underbrace{(-6 + 4x^2)} = 0$

$x_1 = 0$ (ohne Vorzeichen-Wechsel) → kein Wendepunkt

$-6 + 4x^2 = 0 \quad |+6$

$4x^2 = 6 \quad |:4$

$x^2 = \frac{3}{2} \quad |\pm\sqrt{\ }$

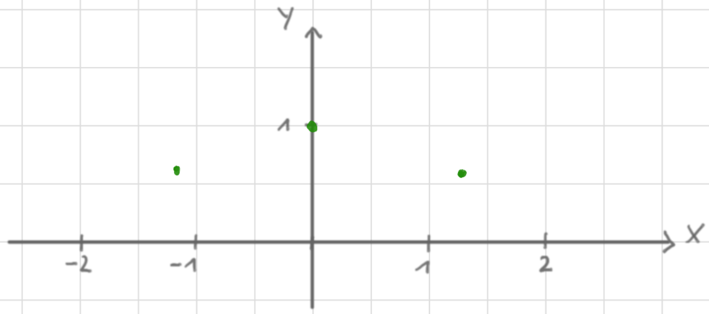
$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ mit VZW, da einfache Nullst. von $f''(x)$ ⇒ Wendepunkte existieren.

NR: $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right) \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}$

$= \left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot e^{-\frac{3}{2}} = 2{,}5 \cdot e^{-1{,}5}$

$W_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \,\middle|\, 2{,}5 \cdot e^{-1{,}5}\right) \qquad W_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \,\middle|\, 2{,}5\, e^{-1{,}5}\right)$ → siehe Achsensymm.

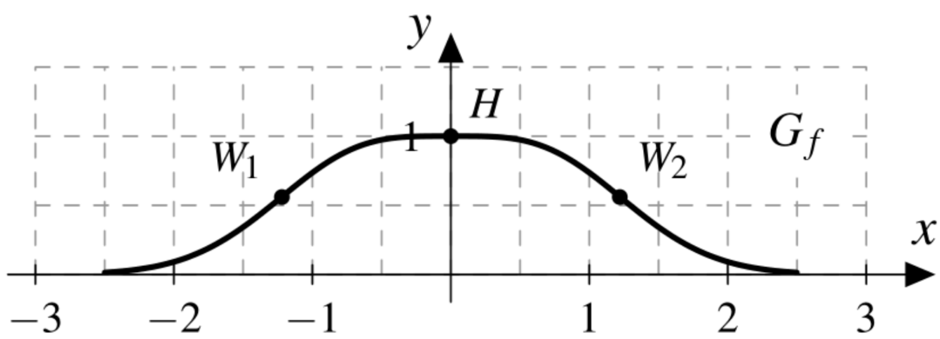
1.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f im Bereich $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem (1 Längeneinheit = 1 cm).



Wertetabelle:

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	...
y	0,01	0,09	0,34	0,74	0,97	1	0,97	0,74	

Wendepunkte: $W_1(-1{,}22 \mid 0{,}56)$; $W_2(1{,}22 \mid 0{,}56)$



2. Am 1. Januar 2010 gab es in Deutschland 1588 reine Elektro-PKW. In untenstehendem Diagramm ist der zeitliche Verlauf des Bestands an Elektro-PKW zum jeweils 1. Januar ab dem Jahr 2010 ($t = 0$) bis zum Jahr 2019 ($t = 9$) durch die eingezeichneten und beschrifteten Punkte dargestellt. Die eingezeichnete Kurve beruht auf der Funktionsgleichung eines exponentiellen Wachstums

$$N(t) = 1588 \cdot b^t$$

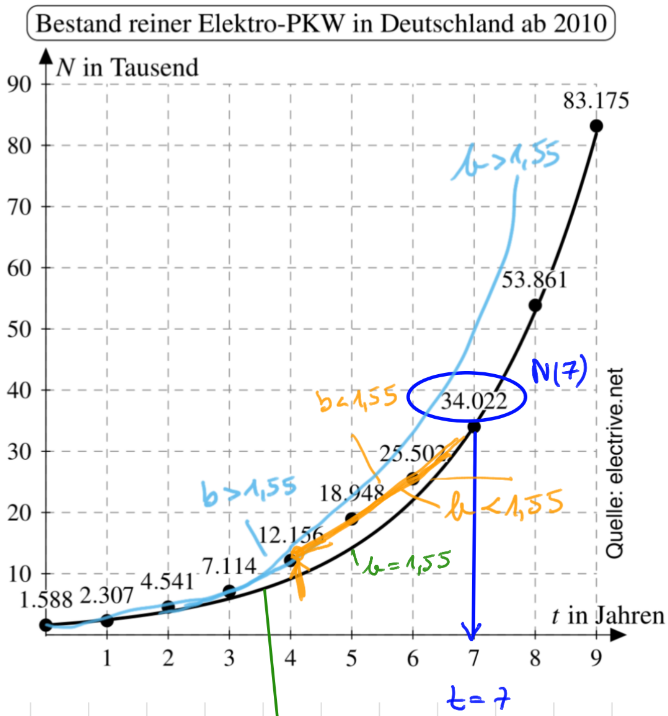
mit $b \in \mathbb{R}^+$ für den betrachteten Zeitraum. Für die Jahre 2017, 2018 und 2019 beispielsweise wird der Zusammenhang in guter Übereinstimmung durch die obige Gleichung wiedergegeben, da die Punkte in diesem Bereich auf der Kurve liegen.

2.1 Berechnen Sie mit Hilfe des Diagramms den Wert von b in obiger Gleichung.

2.2 Im Zeitraum $3 \leq t \leq 6$ liegen die in das Diagramm eingezeichneten Werte oberhalb der Kurve. Erläutern Sie, ob dies eine stärkere bzw. schwächere Zunahme von N im Vergleich zum restlichen Zeitraum bedeutet.

2.3 Das Ziel der derzeitigen Bundesregierung ist es, den Bestand an Elektro-PKW bis Ende 2022 auf eine Million zu erhöhen. Überprüfen Sie, ob dieses Ziel bei einer derzeitigen jährlichen Wachstumsrate von 55% erreichbar ist.

$b = 1{,}55$



2.1. $34022 = 1588 \cdot b^7 \quad | :1588$

$$\frac{34022}{1588} = b^7 \quad | \sqrt[7]{\;}$$

$$\sqrt[7]{\frac{34022}{1588}} = b \approx 1{,}55$$

$$\boxed{N(t) = 1588 \cdot 1{,}55^t}$$

natürlicher Log.

$e^x = 10 \quad | \ln(\,)$

$x = \ln(10)$

$e \approx 2{,}71....$ Eulersche Zahl

$(e^x)' = e^x$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$t = 13$, weil Ende 2022 → 1.1. 2023 → $t = 13$

2.3. $N(13) = 1588 \cdot 1{,}55^{13} \approx 473328$

Lösung

1.

1.1 Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|1)$

1.2 $f(-x)=(1+(-x)^2)\cdot e^{-(-x)^2}=(1+x^2)\cdot e^{-x^2}=f(x)$ und Definitionsmenge ist symmetrisch zu $x=0$. Also ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.

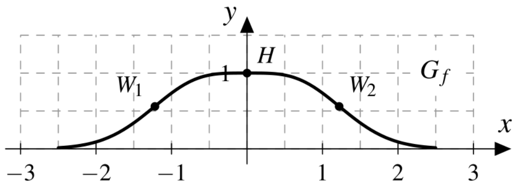
1.3 $f'(x)=2x\cdot e^{-x^2}+(1+x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=(2x-2x-2x^3)\cdot e^{-x^2}=-2x^3\cdot e^{-x^2}=0$, wenn $x_1=0$ ist.

$f'(x)$ hat an der Stelle $x_1=0$ einen Vorzeichenwechsel von Plus zu Minus. Also liegt bei $H(0|1)$ ein Hochpunkt vor.

1.4 $f''(x)=(-6x^2-2x^3\cdot(-2x))\cdot e^{-x^2}=(4x^4-6x^2)\cdot e^{-x^2}=4x^2\cdot(x^2-1{,}5)\cdot e^{-x^2}$

$f''(x)=0$ für $x_1=0$, aber **ohne** VZW. Also liegt bei $x_1=0$ **kein** Wendepunkt vor, auch deshalb, weil an dieser Stelle bereits ein Hochpunkt vorliegt.

Für $x_{2,3}=\pm\sqrt{1{,}5}$ ist $f''(x)=0$ und es liegen VZW von f'' vor. Also existieren zwei Wendepunkte: $W_1(-\sqrt{1{,}5}\,|\,2{,}5\cdot e^{-1{,}5})$, $W_2(\sqrt{1{,}5}\,|\,2{,}5\cdot e^{-1{,}5})$

1.5


2. $N(t)=1588\cdot b^t$

2.1 Z.B. den Wert 34022 aus dem Jahr 2017 ($t=7$) einsetzen:

$34022=1588\cdot b^7 \quad\Leftrightarrow\quad b=\sqrt[7]{\frac{34022}{1588}}\approx 1{,}55$

2.2 Die eingezeichnete Kurve bezieht sich auf die Basis $b=1{,}55$, also auf eine jährliche Wachstumsrate von 55%. In den Jahren 2013 bis 2015 wuchs die Anzahl stärker als 55%, schwächte sich aber im Zeitraum 2015 bis 2017 unter einen Wert von 55% ab.

2.3 $N(13)=1588\cdot 1{,}55^{13}\approx 473328$

Unter der Annahme eines jährlichen Wachstums von 55% wird zum Ende des Jahres 2022 nicht einmal die Hälfte der angestrebten Zahl von E-Autos realisiert sein.